

1. Алгебре скупова

Овде ћемо изучавати фамилије подскупова скупа X са посебним својствима. Ако су чланови фамилије скупова $\{E_i\}_{i \in I}$ међусобно дисјунктни, онда ћемо њихову унију означавати и са $\bigsqcup_{i \in I} E_i$.

ДЕФИНИЦИЈА 3.1. Фамилија \mathcal{I} подскупова скупа X је полуалгебра скупова на X ако има следећа три својства:

1° $X \in \mathcal{I}$.

2° Ако A и B припадају \mathcal{I} , онда и $A \cap B$ припада \mathcal{I} .

3° Ако $A \in \mathcal{I}$, онда се скуп $A^C = X \setminus A$ може представити као дисјунктна унија коначно много скупова из \mathcal{I} : $X \setminus A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$, где је $A_k \in \mathcal{I}$ за $k = 1, \dots, n$.

Како је $\emptyset = X \setminus X$, свака полуалгебра скупова садржи празан скуп.

Пример полуалгебре скупова на \mathbb{R} је фамилија \mathfrak{I}^1 која се састоји од свих интервала облика $(-\infty, b)$ и $[a, b)$, $(-\infty < a < +\infty, -\infty < b \leq +\infty)$. С обзиром да нисмо искључили случај $a \geq b$, празан скуп припада \mathfrak{I}^1 .

Покажимо да је \mathfrak{I}^1 полуалгебра. Узимајући $b = +\infty$ видимо да важи 1°. Даље, $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] = [a, b) \in \mathfrak{I}^1$, где је $a = \max\{a_1, a_2\}$, а $b = \min\{b_1, b_2\}$; слично се разматрају и преостали случајеви потребни за проверу својства 2°. Својство 3° је последица једнакости $\mathbb{R} \setminus (-\infty, b) = [b, +\infty)$, $\mathbb{R} \setminus [a, +\infty) = (-\infty, a)$ и $\mathbb{R} \setminus [a, b) = (-\infty, a) \sqcup [b, +\infty)$.

ДЕФИНИЦИЈА 3.2. Елементе полуалгебре \mathfrak{I}^1 зовемо основним интервалима на \mathbb{R} .

Свака полуалгебра \mathcal{I} на скупу X има и својство

4° Ако A и B припадају \mathcal{I} , онда се $A \setminus B$ може представити као дисјунктна унија коначно много скупова из \mathcal{I} .

Заиста, $B^C = \bigsqcup_{k=1}^n B_k$ за неке $B_k \in \mathcal{I}$ према својству 3°, па је $A \setminus B = A \cap B^C = \bigsqcup_{k=1}^n (A \cap B_k)$, при чему су $A \cap B_k \in \mathcal{I}$ на основу својства 2°.

СТАВ 3.1. Нека је \mathcal{I} полуалгебра на скупу X , а \mathcal{J} полуалгебра на скупу Y . Тада је фамилија $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ свих подскупова Descartes-овог производа $X \times Y$ облика $A \times B$, $A \in \mathcal{I}, B \in \mathcal{J}$, полуалгебра на $X \times Y$.

△ Фамилија $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ има својство 1° јер га испуњавају фамилије \mathcal{I} и \mathcal{J} . Даље, једнакост $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ показује да важи 2°. Затим, ако $A \in \mathcal{I}$ и $B \in \mathcal{J}$, онда је због својства 3° скуп $A^C = X \setminus A$ једнак коначној унији $\bigsqcup_{k=1}^n A_k$, где $A_k \in \mathcal{I}$ за свако $k = 1, \dots, n$; слично $B^C = Y \setminus B$ можемо представити у облику коначне уније $\bigsqcup_{l=1}^m B_l$, где $B_l \in \mathcal{J}$ за свако $l = 1, \dots, m$. Тада једнакост

$$X \times Y \setminus A \times B = (X \times B^C) \sqcup (A^C \times B) = \bigsqcup_{l=1}^m (X \times B_l) \sqcup \bigsqcup_{k=1}^n (A_k \times B)$$

показује да важи и 3°. □

Из овог става добијамо, индукцијом по d , да је фамилија свих подскупова Descartes-овог производа $X = \prod_{i=1}^d X_i = X_1 \times \dots \times X_d$ облика $\prod_{i=1}^d A_i$, где сваки

A_i припада полуалгебри \mathcal{I}_i на скупу X_i за све $1 \leq i \leq d$, заправо полуалгебра на X .

Специјално, имамо полуалгебру \mathfrak{J}^d на \mathbb{R}^d скупова облика $\prod_{i=1}^d I_i$, где је за свако $1 \leq i \leq d$ скуп I_i основни интервал. Елементе полуалгебре \mathfrak{J}^d ћемо звати d -димензионалним основним квадрима или d -димензионалним основним интервалима; у случају $d = 1$ имамо основне интервале на \mathbb{R} .

ДЕФИНИЦИЈА 3.3. Фамилија \mathcal{A} подскупова скупа X је **алгебра скупова** на X ако је полуалгебра и има додатно својство:

3° Ако $A \in \mathcal{A}$, онда и $A^C = X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Свака алгебра \mathcal{A} на X је и полуалгебра и има следећа својства:

4° Ако су A_1, \dots, A_n скупови из \mathcal{A} , онда и $\bigcup_{k=1}^n A_k, \bigcap_{k=1}^n A_k$ припадају \mathcal{A} .

5° Ако $A, B \in \mathcal{A}$, онда и $A \setminus B, A \Delta B \in \mathcal{A}$.

Заиста, $A_1 \cup A_2 = (A_1^C \cap A_2^C)^C \in \mathcal{A}$ због 2° и 3°, па одатле и из 2° индукцијом добијамо 4°. Сада једнакости $A \setminus B = A \cap B^C$ и $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ дају 5°.

Према томе, применом операција \cap, \cup и \setminus над скуповима A_1, \dots, A_n који припадају алгебри \mathcal{A} поново добијамо скупове из алгебре \mathcal{A} .

Следећи став нам омогућава да од дате полуалгебре формирамо алгебру.

СТАВ 3.2. [генерирање алгебри] Нека је \mathcal{I} полуалгебра скупова на X . Тада је фамилија $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ свих коначних дисјунктивних унија скупова из \mathcal{I} једна алгебра скупова на X . Шта више, она је и минимална у смислу да свака друга алгебра скупова на X , која садржи \mathcal{I} , садржи и $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$.

ДЕФИНИЦИЈА 3.4. Алгебру $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ зовемо **алгебром генерисаном полуалгебром \mathcal{I}** .

△ Својства 1° је очигледно, а за доказ 2° посматрајмо произвољне $A, B \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}$. Тада је $A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k, B = \bigsqcup_{l=1}^m B_l$, при чему $A_k, B_l \in \mathcal{I}$ за све k, l . Следи $A \cap B = \bigsqcup_{\substack{1 \leq k \leq n, \\ 1 \leq l \leq m}} A_k \cap B_l$, при чему $A_k \cap B_l \in \mathcal{I}$ на основу 2°. Дакле, $A \cap B \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}$,

одакле индукцијом добијамо да је пресек сваке коначне фамилије скупова из $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ опет скуп из $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$.

Нека је $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}$. Тада је, по дефиницији фамилије $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$, $A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$ за неки коначан низ $A_k \in \mathcal{I}$. Како је, на основу 3°, $A_k^C \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ за свако k , према горе доказаном $A^C = \bigcap_{k=1}^n A_k^C$ припада $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$. Тиме је показано својство 3°.

Користећи једночлане уније имамо да $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ садржи \mathcal{I} , на основу својства 4° имамо да свака алгебра која садржи \mathcal{I} мора садржати и $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$, што доказује тражену минималност. □

Горњи став нам омогућава да уведемо следећу дефиницију.

ДЕФИНИЦИЈА 3.5. Алгебра елементарних скупова на \mathbb{R}^d је алгебра генерисана полуалгебром \mathfrak{J}^d свих d -димензионалних основних квадара у \mathbb{R}^d и означавамо је са \mathfrak{E}^d , тј. $\mathfrak{E}^d = \mathcal{A}_{\mathfrak{J}^d}$.

Дакле, скуп $A \subset \mathbb{R}^d$ је елементаран ако се може представити као коначна дисјунктна унија d -димензионалних основних квадара. Приметимо да таква репрезентација није јединствена. Уколико је $d = 1$, писаћемо и \mathfrak{E} уместо \mathfrak{E}^1 .

2.2. Коначно адитивне мере.

ДЕФИНИЦИЈА 3.6. Нека је \mathcal{A} алгебра скупова на скупу X . Функција $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ је **коначно адитивна мера** на \mathcal{A} ако има следећа два својства:

- 1° $\mu(\emptyset) = 0$.
- 2° (адитивност) Ако су A и B међусобно дисјунктни скупови из \mathcal{A} , онда је $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Индукцијом из 2° добијамо следеће својство коначно адитивних мера, које оправдава њихов назив.

3° (коначна адитивност) Ако су A_1, \dots, A_n међусобно дисјунктни скупови из \mathcal{A} , онда је

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

Наведимо још и следећа својства:

- 4° (монотоност) Ако $A, B \in \mathcal{A}$ и $A \subset B$, онда је $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- 5° Ако $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ и $\mu(A) < +\infty$ онда је $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
- 6° (коначна субадитивност) Ако су A_1, \dots, A_n скупови из \mathcal{A} , онда је

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

Прва два следе из једнакости $\mu(B) = \mu((B \setminus A) \sqcup A) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$.

За доказ последњег својства користићемо разлагање

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigsqcup_{k=1}^n B_k, \quad \text{при } B_1 = A_1, B_k = A_k \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} A_l = \bigcup_{l=1}^k A_l \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} A_l \quad \text{за } 2 \leq k \leq n.$$

Тада $B_k \in \mathcal{A}$ и $B_k \subset A_k$ за свако $k = 1, \dots, n$, па је

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n B_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(B_k) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

Варирањем дефиниције 3.6 уводимо аналогно својство и за полуалгебре скупова.

ДЕФИНИЦИЈА 3.7. Функција $\mu : \mathcal{I} \rightarrow [0, +\infty]$ дефинисана на полуалгебри \mathcal{I} подскупова скупа X назива се **коначно адитивном мером на полуалгебри** \mathcal{I} ако има следећа својства:

- 1° $\mu(\emptyset) = 0$;
- 2° ако су $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{I}$ такви да и $\bigsqcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{I}$, онда је $\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$.

Следећи став ће нам омогућити да дамо примере коначно адитивних мера. Он је уједно и први пример резултата о продужењу (овде са полуалгебре на генерисану алгебру).

СТАВ 3.3. Уз сваку коначно адитивну меру μ на полуалгебри \mathcal{I} постоји једна коначно адитивна мера $\widehat{\mu}$ на алгебри $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ генерираној полуалгебром \mathcal{I} таква да је $\widehat{\mu}(A) = \mu(A)$ за свако A из \mathcal{I} .

△ Сваки скуп A из алгебре $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ може се представити у облику $A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$ за неке $A_k \in \mathcal{I}$. Ако коначно адитивна мера $\widehat{\mu}$ постоји, онда је

$$\widehat{\mu}(A) = \widehat{\mu}\left(\bigsqcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \widehat{\mu}(A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k),$$

што доказује јединственост. Покажимо да је дефиниција функције $\widehat{\mu}$ формулом

$$\widehat{\mu}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$$

коректна, тј. да не зависи од избора разлагања скупа $A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$. Ако је $A = \bigsqcup_{l=1}^m B_l$ друго разлагање скупа A на скупове из \mathcal{I} , тада на основу 2° скупови $A_k \cap B_l$ припадају полуалгебри \mathcal{I} за све $1 \leq k \leq n$ и $1 \leq l \leq m$. Следи

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mu(A_k) &= \sum_{k=1}^n \mu\left(\bigsqcup_{l=1}^m A_k \cap B_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \mu(A_k \cap B_l) \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n \mu(A_k \cap B_l) = \sum_{l=1}^m \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n A_k \cap B_l\right) = \sum_{l=1}^m \mu(B_l), \end{aligned}$$

па је $\widehat{\mu}$ коректно дефинисано на $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$. Из дефиниције следи да је $\widehat{\mu}(A) = \mu(A)$ за свако $A \in \mathcal{I}$, па је $\widehat{\mu}(\emptyset) = 0$. Даље, ако су A и B међусобно дисјунктни скупови из $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$, онда имамо разлагања $A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$ и $B = \bigsqcup_{l=1}^m B_l$ на скупове из \mathcal{I} која дају разлагање $A \sqcup B = \bigsqcup_{k=1}^n A_k \sqcup \bigsqcup_{l=1}^m B_l$. Одатле лако следи да је $\widehat{\mu}(A \sqcup B) = \widehat{\mu}(A) + \widehat{\mu}(B)$, па је $\widehat{\mu}$ коначно адитивна мера на $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$. □

Применимо горње резултате на полуалгебру \mathfrak{I} основних интервала на \mathbb{R} . Природно је дефинисати меру основног интервала формулама

$$m((-\infty, b)) = +\infty, \quad m([a, b]) = b - a.$$

Видимо да је тада испуњен услов транслаторне инваријантности: $m(x + I) = m(I)$ за сваки основни интервал I и свако $x \in \mathbb{R}$. Међутим, понекад је од интереса посматрати и мере μ које нису транслаторно инваријантне, на пример, $\mu(I)$ може представљати тежину дела нехомогене жице (представљене реалном осом) у интервалу I . Због тога ћемо размотрити општију ситуацију.

Наиме, нека је $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ растућа функција. Познато је да тада лимеси $\alpha(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x)$ и $\alpha(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x)$ постоје у $\overline{\mathbb{R}}$. Дефинишемо μ_α -меру непразног основног интервала формулама

$$m_\alpha((-\infty, b)) = \alpha(b) - \alpha(-\infty), \quad m_\alpha([a, b]) = \alpha(b) - \alpha(a),$$

и уведимо $m_\alpha(\emptyset) = 0$. Ако је $\alpha(x) = x$ за свако $x \in \mathbb{R}$, онда имамо горњи случај (који је и најважнији): $m_\alpha(I) = m(I)$ за сваки основни интервал I .

Покажимо да се став може применити на m_α . Једино својство 2° треба проверити: нека је основни интервал I дисјунктна унија основних интервала I_1, \dots, I_n , при томе можемо сматрати да је интервал I_k "лево" од интервала I_{k+1} за $k = 1, \dots, n-1$. Нека је a_k леви, а b_k десни крај интервала I_k и ставимо

$b_0 = a_1$. Тада је a_1 леви, а b_n десни крај интервала I и имамо да је $b_k = a_{k+1}$ за $k = 0, 1, \dots, n-1$. Дакле,

$$\sum_{k=1}^n m_\alpha(I_k) = \sum_{k=1}^n [\alpha(b_k) - \alpha(a_k)] = \sum_{k=1}^n [\alpha(b_k) - \alpha(b_{k-1})] = \alpha(b_n) - \alpha(b_0) = m_\alpha(I).$$

Овим смо доказали следећи став:

Став 3.4. Ако је α расшута функција на \mathbb{R} , онда посвоји тачно једна коначно адитивна мера m_α на алгебри елементарних скупова на \mathbb{R} таква да је $m_\alpha((-\infty, b)) = \alpha(b) - \alpha(-\infty)$ и $m_\alpha([a, b]) = \alpha(b) - \alpha(a)$ кад гог је $-\infty < a < b \leq +\infty$.

Став 3.5. Производ $\mu \times \nu$ коначно адитивних мера μ и ν на полуалгебрама \mathcal{I} и \mathcal{J} редом, дефинисан на полуалгебарском производу $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ ка

$$(\mu \times \nu)(E \times F) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(E)\nu(F) \quad \text{за све } E \in \mathcal{I} \text{ и } F \in \mathcal{J},$$

је коначно адитивна мера на полуалгебри $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$.

△ Све што треба јесте доказати да важи

$$\mu(E)\nu(F) = \sum_{k=1}^n \mu(E_k)\nu(F_k) \quad (3.2)$$

увек кад је $E \times F = \bigsqcup_{k=1}^n E_k \times F_k$ за неке E, E_k у \mathcal{I} и F, F_k у \mathcal{J} за све $k = 1, \dots, n$. Како је $(E_1 \cap E_n) \times (F_1 \cap F_n) = (E_1 \times F_1) \cap (E_n \times F_n) = \emptyset$, можемо без стварног смањења општости узети да је $F_1 \cap F_n = \emptyset$. Доказ једнакости (3.2) извешћемо математичком индукцијом по броју сабирaka у (3.2), полазећи од претпоставке да таква једнакост важи увек кад је неки елемент полуалгебре $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ представљен као дисјунктна унија највише $n-1$ елемената те полуалгебре. Пођимо од чињенице да је $F \setminus F_n = \bigsqcup_{l=1}^m G_l$ за неке елемете G_1, \dots, G_m полуалгебре \mathcal{J} . Због $F_n \cap G_l = \emptyset$ је $E \times G_l = \bigsqcup_{k=1}^n E_k \times (F_k \cap G_l) = \bigsqcup_{k=1}^{n-1} E_k \times (F_k \cap G_l)$, чиме је овај скуп представљен као дисјунктна уније дужине не веће од $n-1$, при чему је $F_k \cap G_l \in \mathcal{J}$ за све $k = 1, \dots, n$ и $l = 1, \dots, m$. Одатле према индукцијској хипотези следи

$$\mu(E)\nu(G_l) = \sum_{k=1}^{n-1} \mu(E_k)\nu(F_k \cap G_l) \quad \text{за све } l = 1, \dots, m.$$

Сабирањем ових једнакости добијамо

$$\begin{aligned} \mu(E)\widehat{\nu}(F \setminus F_n) &= \sum_{l=1}^m \mu(E)\nu(G_l) = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^{n-1} \mu(E_k)\nu(F_k \cap G_l) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mu(E_k) \sum_{l=1}^m \nu(F_k \cap G_l) = \sum_{k=1}^n \mu(E_k)\widehat{\nu}(F_k \setminus F_n), \end{aligned} \quad (3.3)$$

јер је $\bigsqcup_{l=1}^m F_k \cap G_l = F_k \cap (F \setminus F_n) = F_k \setminus F_n$ због $F_k \subset F$, док је последњи сабирац у (3.3) у ствари 0. На основу (3.3) следи коначно

$$\begin{aligned}\mu(E)\nu(F) &= \mu(E)\widehat{\nu}(F \setminus F_n) + \mu(E)\nu(F_n) = \\ &\sum_{k=1}^n \mu(E_k)\widehat{\nu}(F_k \setminus F_n) + \sum_{k=1}^n \mu(E_k)\nu(F_k \cap F_n) = \sum_{k=1}^n \mu(E_k)\nu(F_k),\end{aligned}\quad (3.4)$$

јер је због $F_1 \cap F_n = \emptyset$ у ствари $E \times F_n = \bigsqcup_{k=2}^n E_k \times (F_k \cap F_n)$ дисјунктна унија дужине не веће од $n - 1$. Тако је и ту индукцијска хипотеза омогућила да увидимо $\mu(E)\nu(F_n) = \sum_{k=2}^n \mu(E_k)\nu(F_k \cap F_n)$, а узето је у обзир и да је $\mu(E_1)\nu(F_1 \cap F_n) = 0$. \square

Производи неколико коначно адитивних мера на полуалгебрама дефинишу се итеративно, па ћемо тако бити у могућности да применимо став 3.3 и на полуалгебру основних квадара у \mathbb{R}^d .

Нека је $Q = \prod_{i=1}^d I_i$ основни квадар у \mathbb{R}^d (I_i су основни интервали на \mathbb{R}). Његова d -димензиона мера дефинисана је на следећи начин: $m_d(Q) = \prod_{i=1}^d m(I_i)$, где $m(I_i)$ означава дужину интервала I_i . Индуктивном применом (по d) става 3.5 закључујемо да је m_d коначно адитивна мера на полуалгебри основних квадара у \mathbb{R}^d , па на основу става 3.3 на алгебри елементарних скупова у \mathbb{R}^d постоји тачно једна коначно адитивна мера m_d таква да је за сваки основни квадар $Q \subset \mathbb{R}^d$ његова (природна) d -димензиона запремина управо једнака $m_d(Q)$. У случају $d = 1$ добијена коначно адитивна мера је једнака m_α за $\alpha(x) = x$.

2.3. Мере.

ДЕФИНИЦИЈА 3.8. За низ скупова $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ горњи и доњи лимес дефинишу се на следећи начин:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k; \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Ако су ови скупови међусобно једнаки, онда кажемо да $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ конвергира, а њихову заједничку вредност називамо **границом вредношћу** или **лимесом низа скупова** и означавамо са $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n (= \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)$.

Ако је $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ низ скупова такав да је $A_n \subset A_{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, тада је $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, па онда то записујемо са $A_n \uparrow A$, при чему је управо $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (види Вежбања 3.3. задатак 4.). Слично, ако је $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ низ скупова такав да је $A_{n+1} \subset A_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и ако је сад $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, онда то означавамо са $A_n \downarrow A$, будући да је овде $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

ДЕФИНИЦИЈА 3.9. Нека је \mathcal{A} алгебра скупова на скупу X . Функција

$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ је **мера на алгебри \mathcal{A}** ако има следећа својства:

$$1^\circ \quad \mu(\emptyset) = 0,$$

46

2° (пребројива или σ адитивност) кад год је A_1, A_2, \dots низ међусобно дисјунктива скупова из \mathcal{A} такав да је $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ имамо

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Узимајући да је $A_n = \emptyset$ за $n \geq 3$, закључујемо да је свака мера адитивна, тј. она је и коначно адитивна мера. Наравно, обрнуто не мора да важи.

У следећим примерима X је произвољан скуп. Такође, за $A \subset X$, са χ_A означавамо карактеристичну функцију скупа A :

$$\chi_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}.$$

ПРИМЕР 3.1. За $A \subset X$ дефинишемо $\mu(A)$ као број елемената скупа A ако је A коначан, и $\mu(A) = +\infty$ ако је A бесконачан скуп.

ПРИМЕР 3.2. Нека је a фиксиран елемент скупа X . За $A \subset X$ дефинишемо

$$\delta_a(A) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}.$$

Остављамо читаоцу да провери да су овим задане мере на алгебри свих подскупова скупа X . Прву називамо бројачком мером на скупу X , а другу Dirac³-овом мером у тачки a . Приметимо да је $\delta_a(A) = \chi_A(a)$, а ако је $X = \mathbb{R}$, тада је δ_a управо Lebesgue-Stieltjes-ова мера $\mu_{\chi_{(a,+\infty)}}$.

Наравно, свака мера има сва својства коначно адитивних мера. Наведимо сада својства мера на алгебри \mathcal{A} која зависе од пребројиве адитивности.

3° (непрекидност одоздо) Ако $A_n \uparrow A$, при чему $A \in \mathcal{A}$ и $A_n \in \mathcal{A}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, онда $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$.

Пре свега, низ $\{\mu(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ је растући на основу монотоности коначно адитивних мера. Зато, ако је $\mu(A_n) = +\infty$ за неко n , онда је $\mu(A) = +\infty$ и $\mu(A_m) = +\infty$ за свако $m \geq n$, па је у том случају тврђење тачно. У преосталом случају ($\mu(A_n) < +\infty$ за свако $n \in \mathbb{N}$) примењујемо пребројиву адитивност и разлагање $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1})$, где је

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n [\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [\mu(A_n) - \mu(A_0)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

4° (условна непрекидност одозго) Ако $A_n \downarrow A$, при чему $A_n \in \mathcal{A}$ за $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}$ и $\mu(A_1) < +\infty$, онда $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$.

Прво, из монотоности коначно адитивних мера следи да је низ $\{\mu(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ опадајући, како је $\mu(A_1) < +\infty$ имамо $\mu(A_n) < \infty$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $\mu(A) < +\infty$. Из претпоставки следи да $A_1 \setminus A_n \uparrow \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus A$, при

³ Дирак – Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984)

чему $A_1 \setminus A \in \mathcal{A}$ и $A_1 \setminus A_n \in \mathcal{A}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Користећи претходно својство имамо:

$$\begin{aligned}\mu(A_1) - \mu(A) &= \mu(A_1 \setminus A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [\mu(A_1) - \mu(A_n)] = \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

Како је $\mu(A_1) < +\infty$ одатле следи $-\mu(A) = -\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$, па је ово својство доказано.

5° (пребројива субадитивност) Ако је $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ скупова из \mathcal{A} чија унија $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ такође припада \mathcal{A} , онда је

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Доказ је аналоган доказу својства коначне субадитивности: формирајмо низ $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ на следећи начин: $B_1 = A_1$,

$$B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \quad \text{за све } n \geq 2.$$

Тада $B_n \in \mathcal{A}$ и $B_n \subset A_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, осим тога $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$, па је

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Завршимо ову општу дискусију мера на алгебрама једним критеријумом.

Став 3.6. Коначно адитивна мера μ на алгебри \mathcal{A} која је непрекидна одозго је мера.

△ Нека је $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где је $A \in \mathcal{A}$ и $A_n \in \mathcal{A}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Уведимо $B_n = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$. Тада је $B_n \in \mathcal{A}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $B_n \uparrow A$, па из непрекидности одоздо и коначне адитивности следи

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \quad \square$$

Размотримо сада конкретну ситуацију: нека је $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ растућа функција, знамо да она генерише коначно адитивну меру m_{α} на алгебри \mathfrak{E} елементарних скупова на \mathbb{R} . Под којим условима је m_{α} мера на \mathfrak{E} ? Прво, ако је m_{α} непрекидна слева, то јест,

$$\lim_{x \uparrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) \quad \text{за све } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Заиста, како $[x_1, x_0 - 1/n] \uparrow [x_1, x_0]$, то из непрекидности m_{α} одоздо следи

$\alpha(x_0 - 1/n) - \alpha(x_1) = m_{\alpha}([x_1, x_0 - 1/n] \uparrow [x_1, x_0]) = \alpha(x_0) - \alpha(x_1)$, па $\alpha(x_0 - \frac{1}{n}) \uparrow \alpha(x_0)$. Како због монотоности α постоји $\alpha(x_0-) = \lim_{x \uparrow x_0} \alpha(x)$, тада је и $\alpha(x_0-) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_0 - 1/n) = \alpha(x_0)$, што показује да је α непрекидна слева у тачки x_0 .

Покажимо да важи и обрнуто: ако је α растућа и непрекидна слева, тада је m_{α} мера на \mathfrak{E} . У том циљу докажимо прво варијанту става 3.3.